Hans U. Simon
Annette Ilgen

Bochum, den 7.10.2008

Beispiele zur Vorlesung

Theoretische Informatik
WS 09/10

Vorbemerkung: Hier findet sich eine Sammlung von Beispielen und Motivationen zur Vorlesung Theoretische Informatik.

1 Die Chomsky-Hirachie

1.1 Relationen

1.1.1 Beispiel (Relationen)

Sei $M = \{a, b, c, d, e\}$ eine Menge und R, S Relationen auf M.
Sei $R = \{(a, b), (c, d), (e, a)\}$ und $S = \{(a, a), (b, c), (c, d), (d, e)\}$

1. Dann ist $R^0 = S^0 = \{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (e, e)\}$
2. Dann ist $R^1 = R = \{(a, b), (c, d), (e, a)\}$
   und $S^1 = S = \{(a, a), (b, c), (c, d), (d, e)\}$
3. Dann ist $R^2 = RR = \{(x, y)\ inM \times M | \exists z \in M$ mit $(x, z), (z, y) \in R\}$
   Ist $(a, a) \in R^2$?
   Nein, denn $\nexists z \in M$ mit (a, z) und $(z, a) \in R$
   Ist $(a, b) \in R^2$?
   Nein, denn $\nexists z \in M$ mit (a, z) und $(z, b) \in R$
   Ist $(e, b) \in R^2$?
   Ja, denn $\exists z = a \in M$ mit (e, a) und $(a, b) \in R$
   Insgesamt ergibt sich $R^2 = \{(e, b)\}$

   $S^2 = SS = \{(x, y) \in M \times M | \exists z \in M$ mit $(x, z), (z, y) \in S\}$
   $= \{(a, a), (b, d), (c, e), \}$
4. Dann ist $RS = \{(x, y) \in M \times M | \exists z \in M$ mit $(x, z) \in R, (z, y) \in S\} = \{(a, c), (c, e), (e, a), \}$
   und $SR = \{(x, y) \in M \times M | \exists z \in M$ mit $(x, z) \in S, (z, y) \in R\} = \{(a, b), (b, d), (d, a), \}$
5. Dann ist $R^3 = RRR = \varnothing$ und auch $R^n = \varnothing\ \forall n \geq 3$
   $S^3 = SSS = \{(a, a), (b, e), \}$ und $S^n = \{(a, a)\} \forall n \geq 4$
6. Dann ist $R^+ = R^1 \cup R^2 \cup R^3 \cup ... = \{(a, b), (c, d), (e, a), (e, b)\}$
   und $S^+ = S^1 \cup S^2 \cup S^3 \cup ... = \{(a, a), (b, c), (b, e), (b, d), (c, d), (c, e), (d, e)\}$
7. Dann ist $R^* = R^0 \cup R^+ = \{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (e, e), (a, b), (c, d), (e, a), (e, b)\}$
   und $S^* = S^0 \cup S^+ = \{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (e, e), (b, c), (b, e), (b, d), (c, d), (c, e), (d, e)\}$

1.2 Grammatiken

1.2.1 Motivation

Der Sinn einer Grammatik ist es Regeln anzugeben die eine Sprache beschreiben. Dabei ist Σ das Alphabet aus dem die Wörter der Sprache bestehen. Die Variablen V sind nur Hilfs- bzw. Ersetzungsvariablen. Die Regeln in P geben an, welche Satzformen, also Kombinationen aus Variblen und Buchstaben aus Σ dabei durch andere Satzformen ersetzt werden können. Die Startvariable S wird dabei so ersetzt, dass unser fertiges Wort nur noch aus Buchstaben von Σ besteht. Alle Wörter die keine Variablen mehr enthalten, also nur noch aus Buchstaben von Σ bestehen und durch Ersetzung aus der Startvariablen S hervorgehen, bilden die Sprache die zu der Grammatik gehört.

1.2.2 Beispiel (Grammatik)

Sei $\Sigma = \{a, b, c\}$ unser Alphabet. Wir wollen eine Grammatik finden für alle Wörter die an der dritten Stelle ein a haben. Unsere Sprache L ist also $L = \{w \in \Sigma^* | w = w_1 ... w_n$ und $w_3 = a$ und $|w| \geq 3\}$

Wir erstellen folgende Regeln:
$S \rightarrow XXaY$
XX soll nun alle zweibuchstabigen Wörter abdecken und Y alle beliebigen Wörter aus Σ. Dies erreichen wir mit
$X \rightarrow a|b|c$
und $Y \rightarrow a|b|c|aY|bY|cY$
Letztere Regel kann abgekürzt werden durch:
$Y \rightarrow X|aY|bY|cY$

Unsere Grammatik hat also folgende Komponenten:
$G = (V, \Sigma, P, S)$
$V = \{X, Y, S\}$
$\Sigma = \{a, b, c\}$
$P = \{(S, XXaY), (X, a), (X, b), (X, c), (Y, X), (Y, aY), (Y, bY), (Y, cY)\}$
$S =$ Startvariable

P aufgeschrieben in der Notation für Regeln sieht dann so aus:
$S \rightarrow XXaY$
$X \rightarrow a|b|c$
$Y \rightarrow X|aY|bY|cY$

1.2.3 Beispiel (reguläre Grammatik)

Obige Sprache lässt sich auch mit Hilfe einer regulären Grammatik beschreiben und ist daher regulär.

$G = (V, \Sigma, P, S)$
$V = \{X, Y, Z, S\}$
$\Sigma = \{a, b, c\}$
P in Regelnotation:
$S \to aX|bX|cX$
$X \to aY|bY|cY$
$Y \to a|aZ$
$Z \to a|b|c|aZ|bZ|cZ$
$S =$ Startvariable

Begründung, dass G die Sprache $L = \{w \in \Sigma^* | w = w_1...w_n \text{ und } w_3 = a \text{ und } |w| \geq 3\}$ erzeugt:
S wird durch aX, bX oder cX ersetzt. Unser zu erzeugendes Wort kann also mit einem beliebigen Buchstaben aus Σ beginnen und kann nicht das leere Wort ϵ sein.
Im folgenden wird X ersetzt durch aY, bY oder cY. Der zweite Buchstabe ist somit auch beliebig, muss aber vorhanden sein. Ein einbuchstabiges Wort kann nicht erzeugt werden.
Nun ersetzen wir Y um den dritten Buchstaben zu erhalten. Hier gibt es zwei Möglichkeiten. Entweder wir ersetzen durch a und erhalten ein dreibuchstabiges Wort oder wir ersetzen durch aZ, setzen den dritten Buchstaben also in jedem Fall auf a und können dann durch die Relgel zur Ersetzung von Z jede beliebige Kombination von Buchstaben anhängen oder das Wort enden lassen.

Die Grammatik ist regulär, da alle Regeln aus P von einzelnen Variablen ausgehen und in Satzformen enden die entweder aus einem Terminalzeichen oder aus einem Terminalzeichen gefolgt von einer Variablen enden.
D.h. $\forall (x, y) \in P$ gilt $x \in V$ und $y \in \Sigma$ oder $y \in \Sigma V$.

1.2.4 Beispiel (kontextfreie Grammatik)

$G = (V, \Sigma, P, S)$
$V = \{X, S\}$
$\Sigma = \{a, b, c\}$
P in Regelnotation:
$S \to aScc|X$
$X \to bXa|b$
$S =$ Startvariable

erzeugt die Sprache $L = \{w \in \Sigma^* | w = a^j b^{i+1} a^i c^{2j} \text{ mit } i, j \in \mathbb{N}\}$

Die Grammatik ist kontextfrei, da alle Regeln aus P von einzelnen Variablen ausgehen und in Satzformen ungleich ϵ münden.
D.h. $\forall (x, y) \in P$ gilt $x \in V$ und $y \in (\Sigma \cup V)^+$.

1.2.5 Beispiel (kontextsensitive Grammatik)

$G = (V, \Sigma, P, S)$
$V = \{A, B, S\}$
$\Sigma = \{a, b\}$
P in Regelnotation:
$S \to ASB|AB$
$AB \to BA$
$A \to a$
$B \to b$
$S =$ Startvariable

erzeugt die Sprache $L = \{w \in \Sigma^+ || w|_a = |w|_b\}$

Die Grammatik ist kontextsensitiv, da für alle Regeln von P gilt, dass die Satzform auf der linken Seite der Regel kürzer oder gleich lang ist wie die Satzform auf der rechten Seite der Regel.
D.h. $\forall (x, y) \in P$ gilt $|x| \geq |y|$.

1.2.6 Beispiel (Typ 0 Grammatik)

$G = (V, \Sigma, P, S)$
$V = \{X, Y, A, B, C, S\}$
$\Sigma = \{a, b, c\}$
P in Regelnotation:
$S \to ASC|AXYC|AXC|AYC|AC|X|Y$
$X \to AXB|AB$
$Y \to BYC|BC$
$AA \to a$
$BB \to b$
$CC \to c$
$S =$ Startvariable

Für eine Grammatik vom Typ 0 gibt es keine speziellen Voraussetzungen. Hier können Satzformen durch kürzere Satzformen ersetzt werden. Auf der linken Seite einer Regel steht eine beliebige Satzform mit Ausnahme des leeren Wortes ϵ. Auf der rechten Seite einer Regel ist ebenso eine beliebige Satzform inklusive ϵ erlaubt.

1.2.7 Beispiel (Grammatik mit Epsilonregel)

Betrachte die Sprache $L = \{w \in \Sigma^* | w = a^j b^{i+1} a^i c^{2j}$ mit $i, j \in \mathbb{N}^*\}$ aus Beispiel 1.2.4 Wir wollen nun ϵ in L aufnehmen und setzen $L_0 := L \cup \{\epsilon\}$. Um auch die Grammatik anzupassen brauchen wir auch Regeln die auf ϵ abbilden.

Dazu müssen die wir die Regeln P
$S \to aScc|X$
$X \to bXa|b$
erweitern.

Fügen wir zu der Regel $S \to aScc|X|\ \epsilon$ hinzu so lässt sich neben ϵ auch noch das Wort acc erzeugen. Dieses ist aber nicht in L_0 enthalten. Wir müssen also die Startvariable ändern. Dazu benennen wir sie zunächst in eine Nichtstartvariable um.
$Z \to aZcc|X$
und fügen die Startvariabel S dann wieder hinzu mit
$S \to Z|\epsilon$
Damit steht S nicht mehr auf der rechten Seite einer Regel. und ϵ ist direkt aus S erzeugbar.

Wir erhalten:
$V = \{X, Z, S\}$
$\Sigma = \{a, b, c\}$
P in Regelnotation:
$S \to Z|\epsilon$
$Z \to aZcc|X$
$X \to bXa|b$
$S =$ Startvariable

Dies ist Grammatik für die Sprache $L_0 = \{w \in \Sigma^* | w = a^j b^{i+1} a^i c^{2j} \cup \{\epsilon\}$ Bis auf die Ausnahmeregel $S \to \epsilon$ ist die Grammatik immer noch kontextfrei.

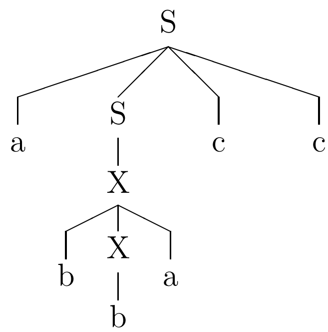
1.3 Syntaxbäume

1.3.1 Beispiel (Syntaxbaum)

Betrachte die Grammatik aus Beispiel 1.2.4. Zu jedem Wort aus L gibt es einen Syntaxbaum, der aus den Regeln der zugehörigen Grammatik aufgebaut ist.

Wir suchen den Syntaxbaum zu dem Wort $ab^2ac^2 \in L = \{w \in \Sigma^* | w = a^j b^{i+1} a^i c^{2j}$ mit $i, j \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$.

Dazu müssen wir wissen welche Regeln angewendet werden um ab^2ac^2 zu erhalten.
$S \Rightarrow aScc \Rightarrow aXcc \Rightarrow abXacc \Rightarrow abbacc$
Diese Regeln bilden folgenden Syntaxbaum.



Liest man nun die Blätter von links nach rechts, so erhält man das Wort *abbacc*.

1.3.2 Beispiel (mehrdeutige Grammatik)

Betrachte die Grammatik
$G = (V, \Sigma, P, S)$
$V = \{S\}$
$\Sigma = \{a, b\}$
P in Regelnotation:
$S \to SS|a|b$
$S =$ Startvariable

Dann lässt sich das Wort *abb* mit zwei verschiedenen Syntaxbäumen darstellen.

Für die Sprache $L = \Sigma^+$ die hier erzeugt wird, gibt es auch eine Grammatik die nicht mehrdeutig ist.
$G = (V, \Sigma, P, S)$
$V = \{S\}$, $\Sigma = \{a, b\}$
P in Regelnotation:
$S \to aS|bS|a|b$
$S =$ Startvariable

Dies ist aber nicht immer der Fall. D.h. es gibt auch Sprachen für die es keine eindeutige Grammatik gibt.